

# Artificial Intelligence: A Modern Approach 阅读笔记

## 一、 书籍信息

书籍题目: Artificial Intelligence: A Modern Approach

作者: Stuart Russell, Peter Norvig

出版时间: Fourth Edition (2020)

阅读章节: 14.4 Kalman Filters

## 二、 卡尔曼滤波器 主题与重点

### 1. 什么是滤波? 什么是卡尔曼滤波?

#### 1) 卡尔曼滤波

当随时间变化, 且带有“噪声”地去估计事物的状态(变量), 这种行为就是“滤波”。如果状态变量是离散的, 可以用隐马尔科夫模型建模; 如果状态是连续的, 可以使用卡尔曼滤波。

#### 2) 用小鸟飞行问题举例

在丛林中看小鸟飞行, 已知每次小鸟闪现时它的速度与位置, 估计下一时刻小鸟的速度与位置。

小鸟每个时间点的状态可用 6 个连续变量描述: 位置( $X_t, Y_t, Z_t$ )和速度( $\dot{X}_t, \dot{Y}_t, \dot{Z}_t$ )。

转移模型和传感器模型均用线性高斯分布的概率密度表示。

令观察之间的间隔为 $\Delta$ , 在观察间隔里小鸟速度不变, 则位置更新表达式为 $X_{t+\Delta} = X_t + \dot{X}_\Delta$ 。增加高斯噪声后, 得到线性高斯转移模型:

$$P(X_{t+\Delta} = x_{t+\Delta} | X_t = x_t, \dot{X}_t = \dot{x}_t) = N(x_t + \dot{x}_t \Delta, \sigma^2)(x_{t+\Delta}) \quad (2.1)$$

图 2.1 给出了包含位置 $X_t$ 和速度 $\dot{X}_t$ 的系统的贝叶斯网络结构。

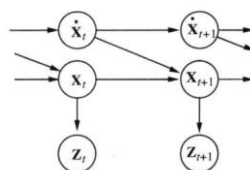


图 2.1 包含位置 $X_t$ 、速度 $\dot{X}_t$ 及测量值 $Z_t$ 的贝叶斯网络结构

其中，转移模型是 $P(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t, \dot{X}_t = \dot{x}_t) = N(x_t + \dot{x}_t \Delta, \sigma^2)(x_{t+1})$ ，传感器模型是 $P(Z_{t+1} | X_{t+1})$ 。

## 2. 更新高斯分布

两步滤波计算：

- (1) 如果当前分布 $P(\mathbf{X}_t | \mathbf{e}_{1:t})$ 是高斯分布，并且转移模型 $P(\mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{x}_t)$ 是线性高斯的，则单步预测分布

$$P(\mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{e}_{1:t}) = \int_{\mathbf{X}_t} P(\mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{x}_t) P(\mathbf{x}_t | \mathbf{e}_{1:t}) d\mathbf{x}_t \quad (2.2)$$

也是高斯分布。

- (2) 如果单步预测分布 $P(\mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{e}_{1:t})$ 是高斯分布，传感器模型 $P(\mathbf{e}_{t+1} | \mathbf{X}_{t+1})$ 也是线性高斯的，则更新后的分布

$$P(\mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{e}_{1:t+1}) = \alpha P(\mathbf{e}_{t+1} | \mathbf{X}_{t+1}) P(\mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{e}_{1:t}) \quad (2.3)$$

也是高斯分布。

由此得出，卡尔曼滤波的 forward 算子若选取一个高斯前向消息，该消息由均值 $\boldsymbol{\mu}_t$ 和协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_t$ 确定；则产生一个新的高斯前向消息 $\mathbf{f}_{1:t+1}$ ，该消息由均值 $\boldsymbol{\mu}_{t+1}$ 和协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{t+1}$ 确定。

因此，从高斯先验概率出发，用一个线性高斯模型进行滤波，在任何时间片都会产生一个高斯状态分布。

## 3. 一个一维实例

卡尔曼滤波器的 Forward 算子将一个高斯分布映射到另一个高斯分布，这可以看作一个根据原有的均值与协方差矩阵，计算新的均值与协方差矩阵的过程。

建立时序模型：描述有噪声观察 $Z_t$ 的单一连续状态变量 $X_t$ 的随机行走（random walk）。

假设其先验分布为具有方差 $\sigma_0^2$ 的高斯分布：

$$P(x_0) = \alpha e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(x_0 - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} \right)}$$

转移模型在当前状态中增加了一个具有方差 $\sigma_x^2$ 的高斯扰动：

$$P(x_{t+1} | x_t) = \alpha e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(x_{t+1} - x_t)^2}{\sigma_x^2} \right)}$$

传感器模型具有方差为 $\sigma_z^2$ 的高斯噪声：

$$P(z_t | x_t) = \alpha e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(z_t - x_t)^2}{\sigma_z^2} \right)}$$

根据公式（2.2）可计算出单步预测分布：

$$P(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x_1 | x_0) P(x_0) dx_0 = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(x_1 - x_0)^2}{\sigma_x^2} \right)} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(x_0 - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} \right)} dx_0$$

利用配方法，可将上式化简成：

$$P(x_1) = \alpha e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(x_1 - \mu_0)^2}{\sigma_0^2 + \sigma_x^2} \right)}$$

可得，单步预测分布是一个具有相同均值 $\mu_0$ 的高斯分布，其方差等于原来方差 $\sigma_0^2$ 与转移方差 $\sigma_x^2$ 之和。

根据公式（2.3）可完成更新步骤，即将 $z_1$ 条件化：

$$P(x_1|z_1) = \alpha P(z_1|x_1)P(x_1) = \alpha e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(z_1 - x_1)^2}{\sigma_z^2} \right)} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(x_1 - \mu_0)^2}{\sigma_0^2 + \sigma_x^2} \right)}$$

合并指数并配方后，得到新的高斯分布：

$$P(x_1|z_1) = \alpha e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\left( x_1 \frac{(\sigma_0^2 + \sigma_x^2)z_1 + \sigma_z^2 \mu_0}{\sigma_0^2 + \sigma_x^2 + \sigma_z^2} \right)^2}{\frac{(\sigma_0^2 + \sigma_x^2)\sigma_z^2}{\sigma_0^2 + \sigma_x^2 + \sigma_z^2}} \right)} \quad (2.4)$$

观察式（2.4），发现新的均值和标准差可以由原来的均值和标准差按照下面的公式计算得到：

$$\mu_{t+1} = \frac{(\sigma_t^2 + \sigma_x^2)z_{t+1} + \sigma_z^2 \mu_t}{\sigma_t^2 + \sigma_x^2 + \sigma_z^2} \quad (2.5)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \frac{(\sigma_t^2 + \sigma_x^2)\sigma_z^2}{\sigma_t^2 + \sigma_x^2 + \sigma_z^2} \quad (2.6)$$

对转移模型和传感器模型的特定取值的一轮更新可以由图 2.2 表示。

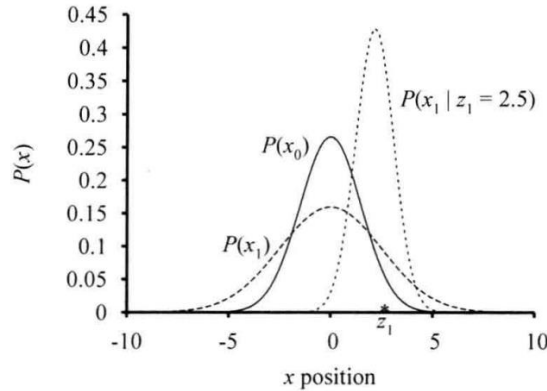


图 2.2 对随机行走进行卡尔曼滤波器更新的一个周期内的各个阶段，由均值 $\mu_0 = 0.0$ 、标准差 $\sigma_0 = 1.0$ 给定先验概率分布，由 $\sigma_x = 2.0$ 给定转移噪声，由 $\sigma_z = 1.0$ 给定传感器噪声，第一个观察值是 $z_1 = 2.5$ (已在  $x$  轴上标出)。注意相对于 $P(x_0)$ ，预测 $P(x_1)$ 是如何被转移噪声拉平的。还要注意到后验分布 $P(x_1|z_1)$ 的均值比观察值 $z_1$ 略偏左，因为这个均值是预测值与观察值的加权平均

公式（2.5）和（2.6）的含义与通用滤波公式或者 HMM 滤波公式一直，但由于高斯分布分特殊性质，有如下有趣的性质：

- （1）新均值 $\mu_{t+1}$ 可看做新观察值 $z_{t+1}$ 和旧均值 $\mu_t$ 的加权平均，如果观察值不可靠（ $\sigma_z^2$ 很大），就更关注旧均值；如果旧均值不可靠（ $\sigma_x^2$ 很大）就更关注观察值；
- （2） $\sigma_{t+1}^2$ 独立于观察，因此可以事先计算出方差值序列；
- （3）方差值的序列很快收敛到一个固定的值，这个值与 $\sigma_x^2$ 和 $\sigma_z^2$ 有关，由此可简化后续计算过程。

#### 4. 一般情况

上述推导在一维情况下进行，多维情况也有类似结果，只是均值与协方差的更新公式更加复杂。

将转移模型、传感器模型以及多元高斯分布式应用于  $x$ - $Y$  平面上的运动物体追踪问题，图 2.3(a)显示了物体的真实轨迹、一系列带有噪声的观察结果以及通过卡尔曼滤波估计得到的轨迹，还画出了单一标准偏差轮廓线表示协方差。从图中可以看到该滤波过程确实很好地跟踪了物体的真实运动，而且方差很快到达一个不动点。

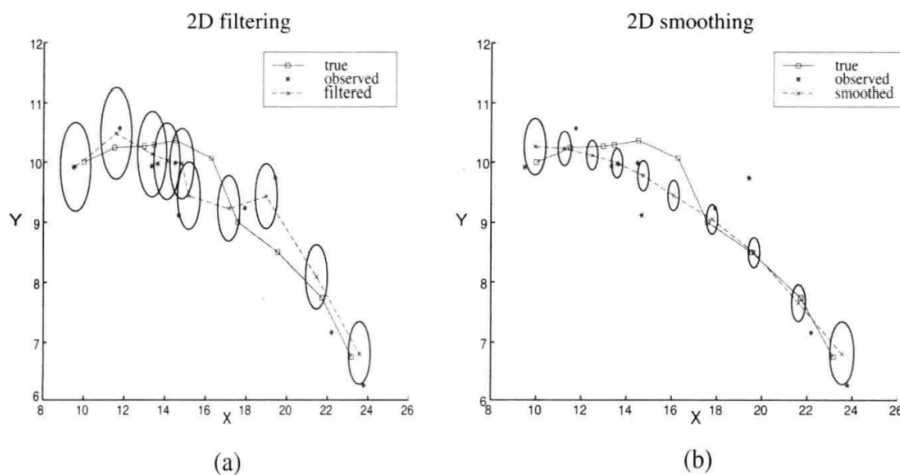


图 2.3

(a) $x$ - $Y$  平面上运动物体的卡尔曼滤波结果，显示了真实轨迹、带有噪声的观察值，以及通过卡尔曼滤波的带的估计轨迹。(b)对同样的观察序列进行二维卡尔曼平滑得到的结果。

#### 5. 卡尔曼滤波的适用性

卡尔曼滤波器及其具体形式的应用：

- 1) 经典应用：对飞行器及导弹的雷达跟踪，对潜艇和地面车辆的声学跟踪、车辆和人的视觉追踪等；
- 2) 更深奥的科学分支：根据云室相片重构粒子的轨迹；
- 3) 根据卫星对地球表面的测量重构洋流；
- 4) 任何通过连续状态变量与噪声测量来刻画的系统都可以应用卡尔曼滤波，这样的系统包括纸浆厂、化工厂、核反应堆、植物生态系统以及国家经济。

上面研究卡尔曼滤波器基于的假设是：线性高斯的转移模型和传感器模型，这是一个很强的假设。

因此引入扩展的卡尔曼滤波器，为了克服建模系统中的非线性。在一个系统中如果转移模型不能描述为状态向量的矩阵乘法，这个系统就是非线性的。扩展卡尔曼滤波器的工作机

理是将某区域中的状态当做局部线性的，在此基础上对系统进行建模，此操作对光滑的、表现良好的系统效果非常好。

关于“不平滑”、“表现不良”的理解：

追踪一只鸟飞行穿过树林。卡尔曼滤波器无论是常规的还是扩展的，都只会对鸟的位置做出一个高斯预测，该高斯分布的均值会以树桩为中心，如图 2.4(a)。另一方面，关于鸟的一个合理的模型应该能预测到鸟的躲避树桩的行为，从树桩的一侧或另一侧绕过去，如图 2.4(b)所示。这样的模型就是非线性的，因为鸟的决策的变化高度依赖于树桩的精准位置。

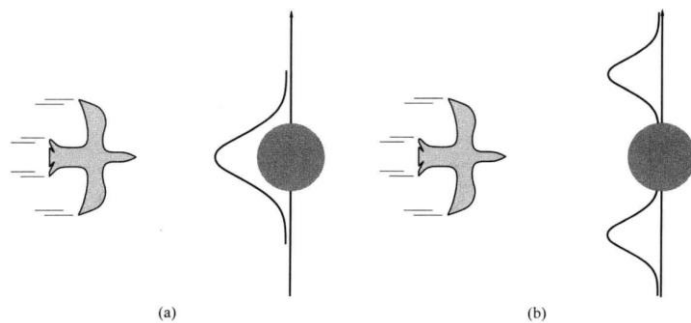


图 2.4 一只鸟飞向一棵树（俯视图）

(a) 使用单高斯分布的卡尔曼滤波器将预测鸟的位置中心在障碍物上；

(b) 一个更真实的模型考虑了鸟的躲避行为，预测它将从树的一侧或另一侧飞过去

处理以上问题目前标准的解决方法是切换卡尔曼滤波器，即多个卡尔曼滤波器并行地运行，其中每个都使用不同的系统模型——例如一个直行，一个向左急转，一个向右急转。我们使用这些预测的加权和，其权值依赖于每个滤波器对当前数据的适合程度。

### 三、 一道习题

#### 习题 15.12

让我们考察一下公式(2.5)和(2.6)中方差更新的行为表现。

- 在给定不同的 $\sigma_x^2$ 和 $\sigma_z^2$ 取值下，绘制出作为  $t$  函数的 $\sigma_t^2$ 取值图像。
- 证明：此更新过程存在一个不动点 $\sigma^2$ ，满足当 $t \rightarrow \infty$ 时， $\sigma_t^2 \rightarrow \sigma^2$ 。计算 $\sigma^2$ 的值。
- 对当 $\sigma_x^2 \rightarrow 0$ 时以及当 $\sigma_z^2 \rightarrow 0$ 时所发生的事情给出一个定性的解释。

解：

- 给定不同的 $\sigma_x^2$ 和 $\sigma_z^2$ 取值下， $t$  函数的 $\sigma_t^2$ 取值图像。

分别取值： $\sigma_x^2 = 0.1$ ， $\sigma_z^2 = 1.0$ ； $\sigma_x^2 = 1.0$ ， $\sigma_z^2 = 1.0$ ； $\sigma_x^2 = 10$ ， $\sigma_z^2 = 1.0$ 。

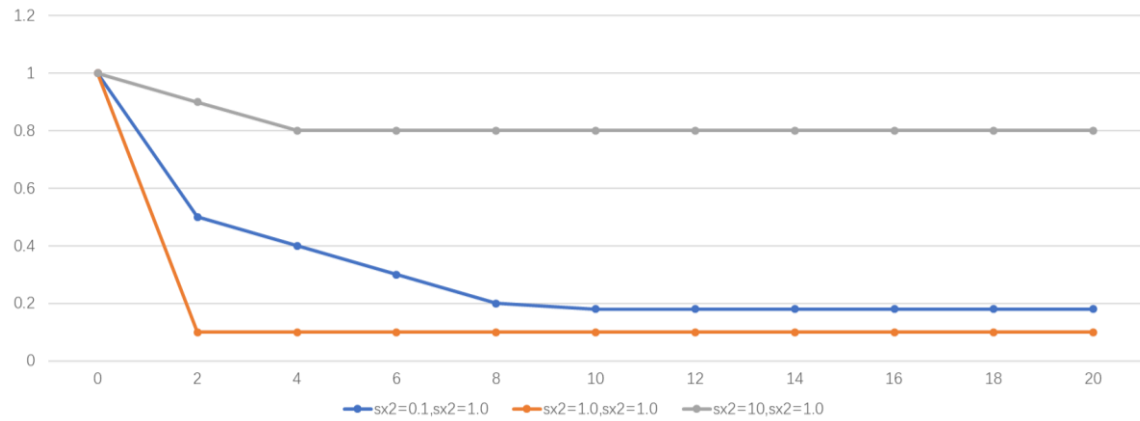


图 3.1 不同 $\sigma_x^2$ 和 $\sigma_z^2$ 取值下 t 函数的 $\sigma_t^2$ 取值图像

从上图可以说明， $\sigma_x^2$ 和 $\sigma_z^2$ 更相近时，卡尔曼滤波效果更好，所以选取合适的 $\sigma_x^2$ 和 $\sigma_z^2$ 值对于卡尔曼滤波性能非常重要。

b. 此题可用反证法证明

假设存在不动点 $\sigma^2$ ，当 $t \rightarrow \infty$ 时， $\sigma_t^2 = \sigma_{t+1}^2$ ，令其等于 $\sigma^2$ ，可得

$$\sigma^2 = \frac{(\sigma^2 + \sigma_x^2)\sigma_z^2}{\sigma^2 + \sigma_x^2 + \sigma_e^2}$$

将 $\sigma^2$ 视作未知数，解二元一次方程组，可得

$$\sigma^2 = \frac{-\sigma_x^2 + \sqrt{\sigma_x^4 + 4\sigma_x^2\sigma_z^2}}{\sigma_z^2}$$

等式右边为一个恒大于等于 0 的数，假设成立。

故存在不动点 $\sigma^2$ ，且 $\sigma^2 = \frac{-\sigma_x^2 + \sqrt{\sigma_x^4 + 4\sigma_x^2\sigma_z^2}}{\sigma_z^2}$ 。

c. 当 $\sigma_x^2 \rightarrow 0$ 时，由 $\sigma^2 = \frac{-\sigma_x^2 + \sqrt{\sigma_x^4 + 4\sigma_x^2\sigma_z^2}}{\sigma_z^2}$

可得 $t \rightarrow \infty$ 时， $\sigma \rightarrow 0$

说明当转移模型的精确度极高（方差趋近 0）时，滤波后方差也趋近于 0。

当 $\sigma_z^2 \rightarrow 0$ 时， $\sigma_{t+1}^2 = \frac{(\sigma_t^2 + \sigma_x^2)\sigma_z^2}{\sigma_t^2 + \sigma_x^2 + \sigma_z^2} = 0$

说明当传感器的精确度极高（方差趋近 0）时，滤波后方差也趋近于 0。