

# “回溯法与地图着色” 阅读笔记

通信 1903

陶洁婷

19291046

**摘要：**本文通过阅读《Artificial Intelligence: A Modern Approach》书中的“Constraint Satisfaction Problems”章节，着重讲述了回溯法解决地图着色的问题。首先，对文中的地图着色的现实问题转化为数学模型，并画出约束图，列出变量、值域、约束关系等。然后通过一次回溯搜索的实例，采取最简单的顺序检索和时序回溯的策略，形象地展示出回溯搜索的整个过程，并列出搜索树。可以发现，回溯搜索的搜索树叶结点大大减少，可以减少时间复杂度。然后，进一步研究对该算法的性能优化的方法，分别介绍了文中的前向检验、带冲突指导回跳的回溯、度启发式、最少剩余值启发式、最少约束值启发式等方法，并引用了课后的一道习题进行验证与实践。其中，前向检验和建立冲突集的过程可以同步完成，减少计算量，在为搜索树减枝的同时减小回溯的代价；三种启发式的运用可以分别解决变量的取值以及赋值的顺序的问题，同样能够减小时间复杂度。

为将回溯法与信息网络中的应用联系起来，我还进行了文献查阅，发现该算法与数学模型能够应用在 GSM 系统以及蜂窝系统的信道分配问题中。这启示我们，基本的数学模型与算法往往是普适性的，在求解新的问题中，如何将其联想抽象成底层模型，并运用已有的高性能算法进行求解，是其中关键的步骤。

## 一、文献信息

论文题目 Constraint Satisfaction Problems

作者 Stuart Russell and Peter Norvig

发表途径 来自《Artificial Intelligence: A Modern Approach》书本

发表时间 2020 年

## 二、问题意义

### (1) 研究问题

本章要讨论的是如何使用回溯法解决约束满足问题 (CSP)，即对于一组变量，如何使每个变量都被赋值且同时满足所有关于变量的约束，也就是相容的、完整的赋值。

### (2) 问题实例：地图着色问题



图 1 着色问题

上面的澳大利亚地图显示了每个州及边界，任务是对每个区域涂上红色、绿色或者蓝色，要求相邻的区域颜色不能相同。

## 三、思路方法

针对上述地图着色问题，首先将它抽象为数学模型约束满足问题，分别定义它的变量、值域、约束关系等。然后列举了普通回溯搜索过程，得到了一组满足的解。为了进行性能优化，分别通过改变变量和取值顺序、搜索与推理交错进行、采用向后看的方法进行改进，得到代价更小的搜索过程。

### (1) 问题抽象

将此任务形式化为 CSP，首先要将图中的区域定义为变量： $X = \{WA, NT, Q, SA, NSW, V, T\}$ 。每个变量的值域是集合  $D = \{R, G, B\}$ 。约束是要求相邻的区域染成不同的颜色，因此约束关系有 9 个元组： $C = \{SA \neq WA, SA \neq NT, SA \neq Q, SA \neq NSW, SA \neq V, WA \neq NT, NT \neq Q, Q \neq NSW, NSW \neq V\}$ 。把 CSP 可视化地表示成如图所示的约束图，图中结点对应于问题的变量，变量间的连线表示两者之间有约束。

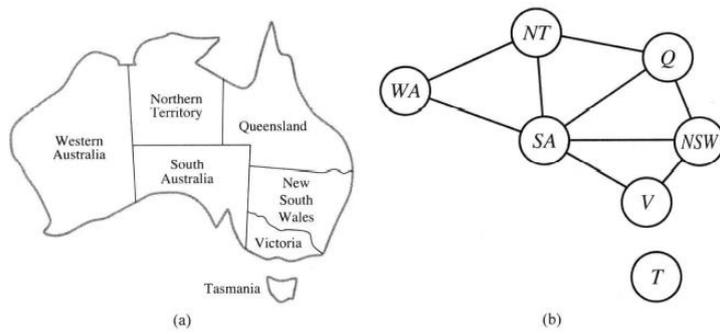


图 2 约束图

## (2) 简单的回溯搜索

回溯算法应用了深度优先算法，它不断选择未赋值的变量，轮流尝试变量值域中的每一个值，试图找到一个解。一旦检测到不相容，则回溯失败，返回上一次调用尝试另一个值。其具体着色过程如下图所示。

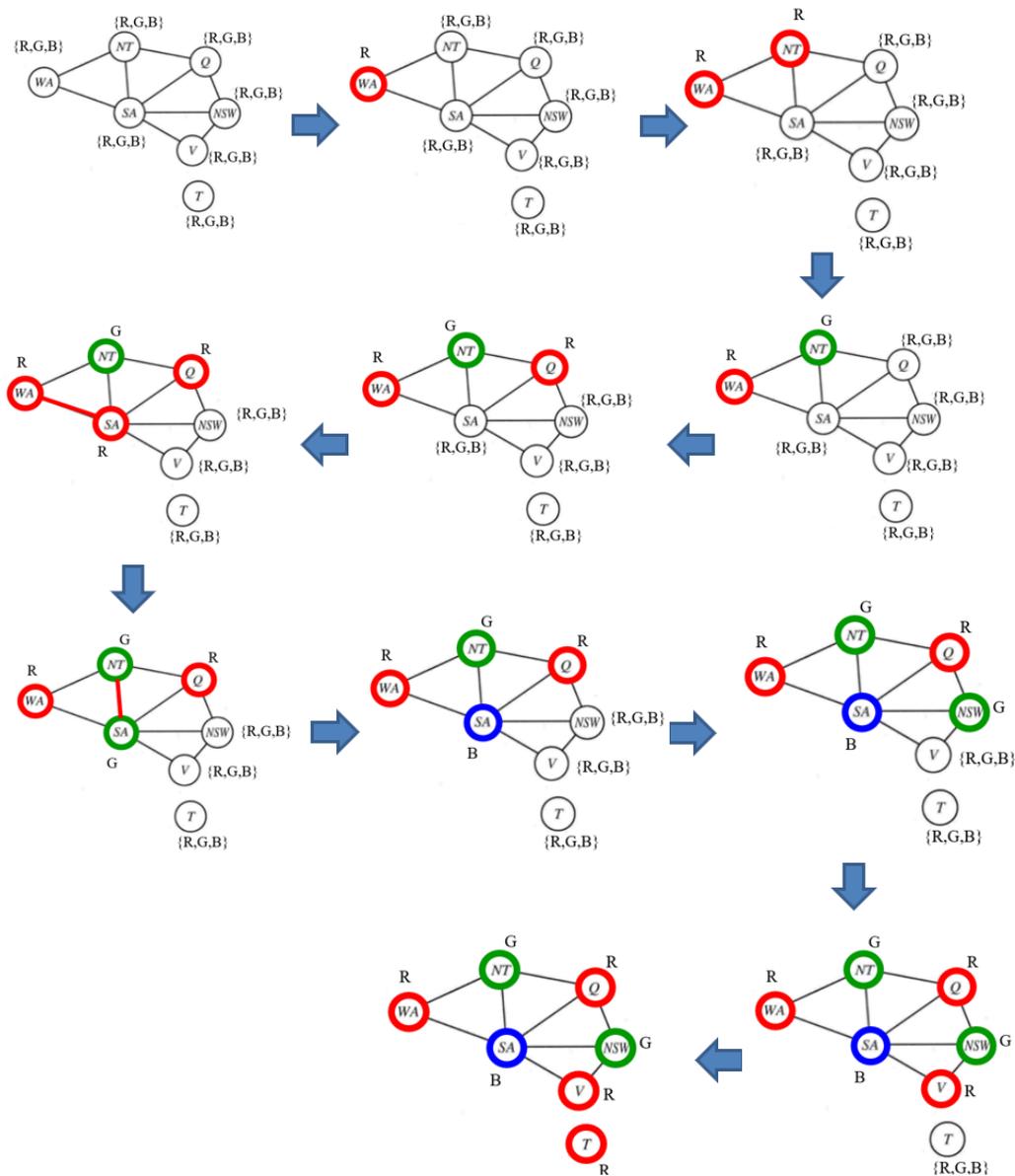


图 3 回溯算法示意图

画出回溯搜索过程的部分搜索树，我们可以发现，由于约束关系的制约，搜索树得以显著得减小。若采用穷举法，叶结点的个数为  $n! \cdot d^n$ ，而采用回溯搜索法，叶结点的个数减少到  $d^n$  个。

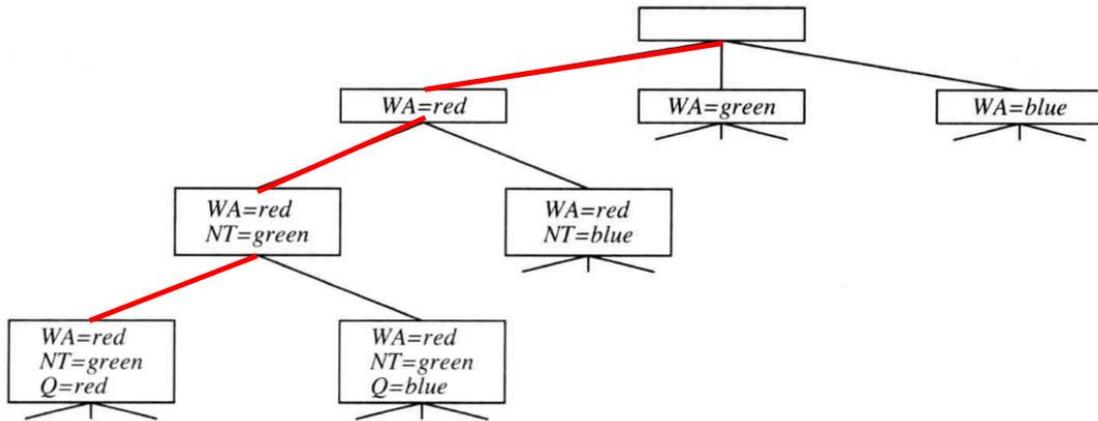


图 4 搜索树

在上述的例子中，我们默认第一个开始赋值的点为 WA，且取点和取值的顺序都是固定的。为提高性能，本章采取以下三种措施：优化变量和取值顺序；搜索与推理交错进行；进行智能回溯。

### (3) 变量和取值顺序

- 对于选择第一个着色区域，可以采用**度启发式**。通过选择与其他未赋值变量约束最多的变量来试图降低未来的分支因子。将变量与其他未赋值变量的约束数量称为度，当选择第一个变量进行赋值时，应当选择度最大的变量进行赋值。
- 对于变量选择的顺序，可以采用**最少剩余值 (MRV) 启发式**。它选择“合法”取值最少的变量，那么 MRV 启发式可以更快的检测到失败，从而避免其他无意义的搜索继续进行，达到对搜索树减枝的效果。
- 对于变量的取值顺序，可以采用**最少约束值启发式**。他优先选择的值是给邻居变量留下更多的选择，试图为剩余变量赋值留下最大的空间。

### (4) 搜索与推理交错进行

除了直接通过搜索来求解，推理也是一种重要的方法，可以在搜索前缩小变量的值域空间。最简单的推理形式是**前向检验**，只要变量 X 被赋值了，就对它进行弧相容检查：对每个通过约束与 X 相关的未赋值变量 Y，从 Y 的值域中删去与 X 不相容的那些值。

### (5) 智能回溯：向后看

智能回溯能够更快的处理回溯失败的情况。简单的时序回溯在回溯失败时，仅采取简单的处理原则：退回时间最近的决策点并尝试另一个值。而智能回溯的回跳方法是退回到可能解决这个问题的变量，也就是跟踪与此刻冲突的一组赋值的冲突集，并回溯到冲突集中时间最近的赋值。算法在检验合法值时保存冲突集，如果没有找到合法值，那么它按照失败标记返回冲突集中时间最近的元素。

#### 四、习题分析

针对上述改进的回溯算法，可以将其运用到以下习题中进行解答，进一步加强理解。

##### (1) 题目

考虑有 8 个节点  $A_1$ 、 $H$ 、 $A_4$ 、 $F_1$ 、 $A_2$ 、 $F_2$ 、 $A_3$ 、 $T$  的图。 $A_i$  与  $A_{i+1}$  相连，每个  $A_i$  与  $H$  相连， $H$  和  $T$  相连， $T$  和每个  $F_i$  相连。使用如下对策对图着三种颜色 (R、G、B)：前向检验，带冲突指导回跳的回溯，度启发式确定第一个变量，最少剩余值启发式确定变量顺序，最少约束值启发式确定取值顺序。

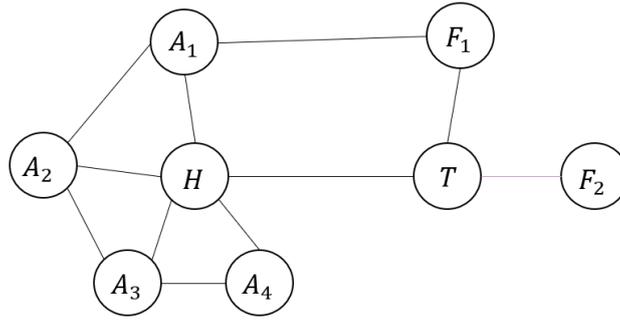


图 5 习题的约束图

##### (2) 解答

首先根据度启发式确定第一个变量， $H$  的度为 5，它的值最大，因此第一个给  $H$  赋值，即令  $H=R$ 。

然后根据前向检验对所有点的值域进行缩减，从而减少计算量。

根据最少剩余值启发式确定变量顺序，此时  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $A_4$  的值域都为 2 个合法选择，而其余未赋值点值域为 3 个，因此可在  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $A_4$  中随机选取一个作为下一个赋值的变量。这里选择  $A_1$  赋值为  $G$ ，再一次进行前向检验的推理。在这个过程中，要同时对冲突集进行跟踪记录，便于搜索失败时及时找回到冲突的点。可以得到下表。

表 1 前向检验和冲突集

	变量	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$H$	$T$	$F_1$	$F_2$
	初始值域	RGB	RGB	RGB	RGB	RGB	RGB	RGB	RGB
After $H=R$	值域	GB	GB	GB	GB	R	GB	RGB	RGB
	冲突集	H	H	H	H		H		
After $A_1=G$	值域	G	B	GB	GB	R	GB	RB	RGB
	冲突集	H	$HA_1$	H	H		H	$A_1$	

同理依次对后面的  $A_2$ 、 $A_3$ 、 $A_4$  都进行赋值，下面的图列出了赋值的过程。

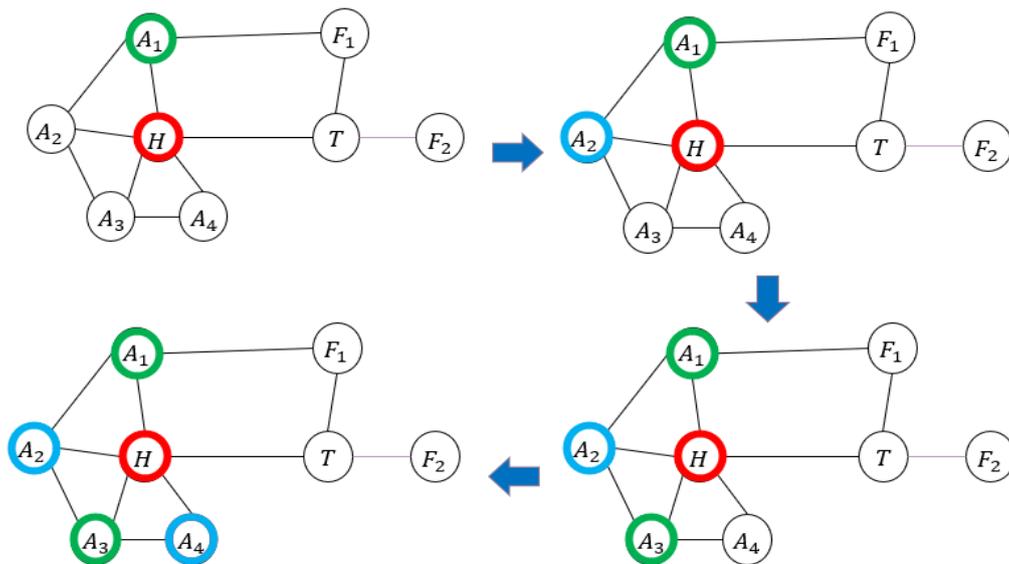


图 6  $A_2$ 、 $A_3$ 、 $A_4$  的赋值

下一步将选择  $T$  进行赋值，此时  $T$  的值域为  $\{G, B\}$ 。根据最少约束值启发式，要给邻居变量  $F_1$  和  $F_2$  留下更多的选择，因此选择  $G$ 。以此类推，最终得到正确的一组解如下图所示。

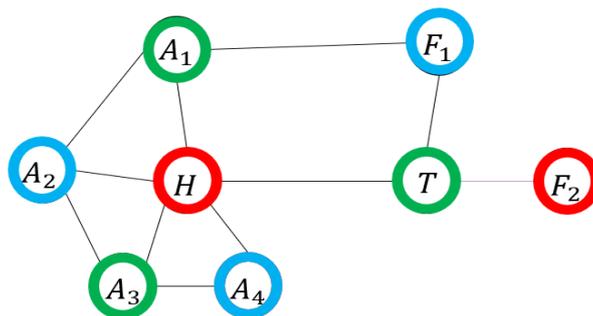


图 7 习题的正确解

## 五、启发思考

本次阅读内容来源于老师推荐的这本人工智能书本中的章节，并对一道习题进行了深入分析。本章涉及到的约束满足问题以及回溯搜索算法在人工智能以及信息网络领域都很有意义。通过查阅其他文献，发现它可以应用于 GSM 通信系统中，为了避免相邻基站之间的干扰因而要求相邻的基站之间不能采用相同的频率来进行通信的情况，以及蜂窝系统中的信道分配问题。<sup>[2]</sup>所谓信道分配，就是用尽可能少的信道数，满足蜂窝小于话务需求和电磁兼容限制，对各小区进行信道分配。例如，可以要求小于等于 1 个单位距离的两个集合站使用的信道的最小间隔数为 2，小于等于 2 个单位距离的两个集合站使用的信道的最小间隔数为 1，每个基站只分配一个信道，进而可以将该模型抽象为地图着色问题，使用回溯算法进行解决。这里给出论文中最终计算得到的一种信道分配结果。<sup>[1]</sup>

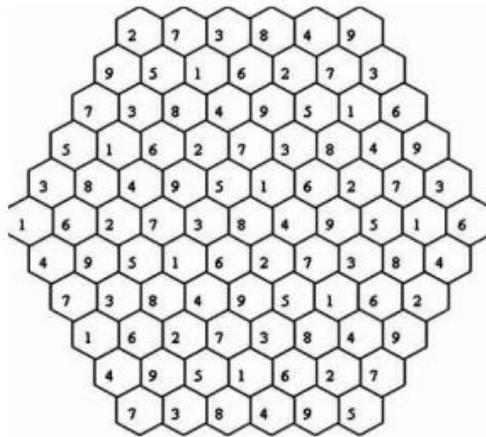


图 8 信道分配结果

实际上，在新技术出现的时候，科学的研究也会遇到新的问题。然而，只要具备了进行数学建模的能力，我们可以将新的问题抽象成旧的模型，采用已经具有的技术和算法来进行求解。一些具有高度适配度的基础模型，往往也可以套用在很多新兴技术上，作为基础和参考，提高他们的性能。本文中提到的问题就可以被这样运用。无论是应用到地图着色问题，还是运用到信道分配问题，都可以被建模为：约束满足问题。

参考文献(除规定阅读材料外的拓展)：

- [1] 杨尚瑾. 基于回溯算法的蜂窝通信系统最优信道分配. 武汉大学电气工程学院, 2012
- [2] [https://blog.csdn.net/big\\_caitou/article/details/106612352](https://blog.csdn.net/big_caitou/article/details/106612352)